Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 2

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 22.04.2008**

[H4] *Volumen als Flächenintegral?* **(1 + 1 = 2 Punkte)**

Ein Körper sei beschrieben durch die Randfläche

$$z(x,y) = h\left[1 - \left((\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2\right)^4\right]$$

und $z(x,y) = 0$.

(a) Um a und b direkt loszuwerden, wählt man welche Koordinaten? Wie lautet das Flächenelement d^2x in ebendiesen Koordinaten?

(b) Die Berechnung des Flächenintegrals $\int_F \mathrm{d}^2x\ z(?,?)$ sollte reine Formsache sein.

[H5] *Geometrie eines speziellen Ellipsoiden* **(0,5 + 1,5 + 1 + 2 = 5 Punkte)**

Ein Körper sei gegeben durch

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq 1\ , \quad x, y, z \geq 0$$

(a) Man skizziere den Körper!

(b) Welche Koordinatenwahl $\vec{x}(\vec{u})$ ist am günstigsten? Zwei Koordinaten u_1 und u_2 sollten reichen! Wir schreiben die Skalarprodukte $\vec{t}_{u_i} \cdot \vec{t}_{u_j}$ der Tangentialvektoren $\vec{t}_{u_i} := \frac{\partial \vec{x}}{\partial_{u_i}}$, $i, j = 1, 2$ matrixweise und nennen dieses Metrik g_{ij}. Hieraus folgt ein Integralausdruck für die gekrümmte Oberfläche F des Körpers, die via

$$F = \int \mathrm{d}^2u\ \sqrt{\det g_{ij}}$$

definiert ist. Integral hinschreiben (noch **nicht** lösen)!

(c) Welche gekrümmte Oberfläche ergibt sich für $a = b = c$? Skizze! Jetzt darf gelöst werden!

(d) Wo liegt der Schwerpunkt $\vec{R}$ des Körpers mit $a = b = c$?

[H6] *Δ in Kugelkoordinaten a.k.a. Studentenfolter* **(1,5 + 0,5 + 1 = 3 Punkte)**

Jeden Studenten erwischt es einmal in seiner Laufbahn. Nun auch uns! Der Laplace-Operator ist definiert gemäß

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla$$

und im Kartesischen gerade $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

(a) Jetzt wird's jedoch gemein: Wie lautet Laplace in Kugelkoordinaten? Hierzu denke man sich stets eine Funktion $\phi(r, \theta, \varphi)$, auf die Laplace wirken kann. Nabla in Kugelkoordinaten darf aus Vorlesung oder **[H3]** übernommen werden.

(b) In späteren Aufgaben – nämlich wenn ϕ rotationsinvariant – hilft der Trick

$$\Delta\phi(r) = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right)\phi(r) = \left(\frac{1}{r}\partial_r^2 r\right)\ \phi(r).$$

Zeigen!

(c) Man berechne einmal kartesisch und einmal in Kugelkoordinaten $\Delta\phi(\vec{x})$ mit $\phi(\vec{x}) = A \cdot e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$, $\vec{k} = \vec{\mathrm{const}}$.